

به نام خدا

مثال: آماره کافی

$$T(x) = \sum_{i=1}^n x_i$$

$$x_i \sim \text{Bernoulli}(\theta)$$

به سبب θ

$$P(\underline{x} | T(x), \theta) :$$

$$P(\underline{x} = \underline{x} | T(x) = k, \theta = \theta_0)$$

$$f_x(x|y) \equiv f(x|y=y)$$

x : $\checkmark$

$$P_x(i) = P_r(x=i)$$

x : $\checkmark$

$$f_x(x) \xleftarrow{\frac{d}{dx}} F_x(x) = P_r\{x \leq x\}$$

$$P(\underline{X} = \underline{x} \mid \tau(\underline{x}) = k, \theta = \theta_0) = \frac{P(\underline{X} = \underline{x}, \tau(\underline{x}) = k \mid \theta = \theta_0)}{P(\tau(\underline{x}) = k \mid \theta = \theta_0)}$$

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B|A)P(A)}{P(B)}$$

$$= \frac{P(\tau(\underline{x}) = k \mid \underline{x} = \underline{x}, \theta = \theta_0) P(\underline{x} = \underline{x} \mid \theta = \theta_0)}{\binom{n}{k} \theta_0^k (1 - \theta_0)^{n-k}}$$

$$P(\underline{x}, \theta \mid \tau(\underline{x})) = P(\underline{x} \mid \tau(\underline{x})) P(\theta \mid \tau(\underline{x}))$$

$$= \begin{cases} \frac{\theta_0^k (1 - \theta_0)^{n-k}}{\binom{n}{k} \theta_0^k (1 - \theta_0)^{n-k}} & \tau(\underline{x}) = k \\ 0 & \tau(\underline{x}) \neq k \end{cases} \quad \theta \rightarrow \tau(\underline{x}) \rightarrow \underline{x}$$

$$f(\underline{x}(y)) \equiv f(\underline{x} \mid Y = y) \quad \text{where } \underline{x} = \tau(\underline{x})$$

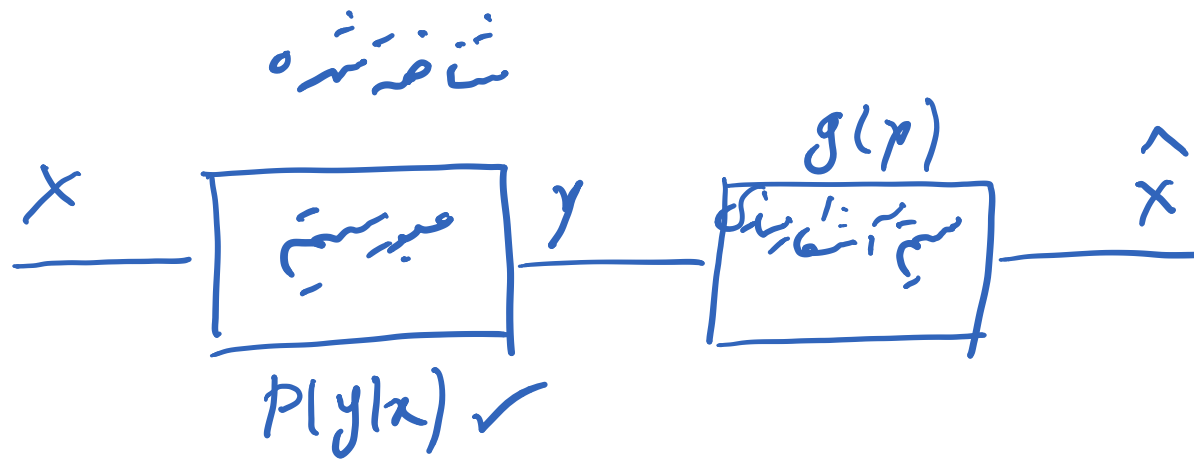
$$P(\underline{x} \mid \tau(\underline{x}) = k, \theta = \theta_0) = P(\underline{x} \mid \tau(\underline{x})) \quad \text{where } \theta = \theta_0$$

فانو's inequality

مقصود: متغیر تصادفی X با توزیع $P(x)$ را در نظر بگیرید. Y متغیر تصادفی (شامل مشاهدات)

که با تابع احتمال $P(y|x)$ با متغیر تصادفی X مرتبط است. تابع $\hat{X} = g(Y)$ نیز ارائه است

$$P_e = P\{X \neq \hat{X}\}$$



$$H(P_e) + P_e \log[1/P_e] \geq H(X|Y)$$

$$X \rightarrow Y \rightarrow g(Y) = \hat{X}$$

در صورت پایه سی را بنویسید

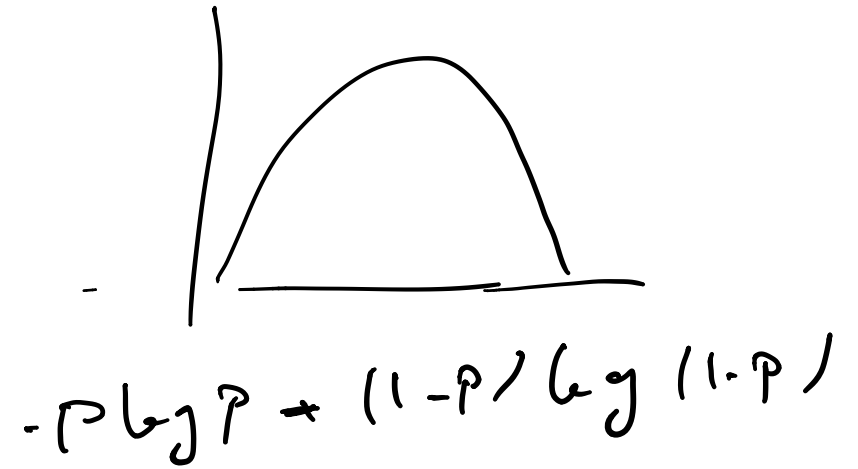
$$H(P_e) + P_e \lg(|\mathcal{X}| - 1) \geq H(X|\hat{X}) \geq H(X|Y)$$

یجابان در برابری با یکدیگر $H(P_e) \leq 1$

$$1 + P_e \lg(|\mathcal{X}| - 1) \geq H(X|Y)$$

$$\Rightarrow P_e \geq \frac{H(X|Y) - 1}{\lg(|\mathcal{X}| - 1)}$$

نتیجه $\Rightarrow P_e \geq \frac{H(X|Y) - 1}{\lg |\mathcal{X}|}$



اثبات: برای اثبات قضیه فانون، ابتدا عبارت زیر را اثبات می‌کنیم

$$H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1) \geq H(X|Y)$$

برای این منظور، متغیر تصادفی E را به صورت زیر تعریف می‌کنیم،

$$E \stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & P_e \\ 0 & 1 - P_e \end{cases} \quad \begin{matrix} \text{آباضافه} \\ \text{آبامنه} \end{matrix}$$

$$\stackrel{\text{def}}{=} \begin{cases} 1 & X \neq \hat{X} \\ 0 & X = \hat{X} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} H(E, X|Y) &= H(X|Y) + \underbrace{H(E|X, Y)}_{\substack{\text{در این مورد} \\ \text{با داشتن } X, Y, \text{ شگرتی صاف می‌شود} \\ \text{چون، کامل مشخص می‌شود}}} \\ &= H(E|Y) + H(X|E, Y) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow H(X|Y) = H(E|Y) + H(X|E, Y)$$

$$H(x|y) = H(\epsilon|y) + H(x|\epsilon, y)$$

از طرف دیگری داریم

$$H(\epsilon|y) \leq H(\epsilon) = H(P_e) \quad (1)$$

مستوی کردن از ایام می باشد

$$H(x|\epsilon, y) = H(x|\epsilon=0, y) \underbrace{P_r\{\epsilon=0\}}_{1-P_e} + H(x|\epsilon=1, y) \underbrace{P_r\{\epsilon=1\}}_{P_e}$$

تعریف آنبردنی شرطی

$$= H(x|\epsilon=0, y) (1-P_e) + P_e H(x|\epsilon=1, y)$$

$$\hat{x} = \hat{x} = g(y)$$

با داشتن $\epsilon=0$ و y ، x مشخص است

$$\Rightarrow H(x|\epsilon, y) = P_e H(x|\epsilon=1, y)$$

$x_i = x \neq \hat{x}$

$$H(x | \epsilon, \gamma) = P_e H(x | \epsilon=1, \gamma)$$

$$\epsilon=1 \implies x \neq \hat{x}$$

تقریباً $x = x_i$

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad n = |X|$$

بنابراین x مقدار از مجموعه X
را به غیر از x_i اختیار کند.

$$\implies H(x | \epsilon=1, \gamma) \leq \log(|X|-1) \quad (2)$$

$$H(x | \epsilon=1, \gamma) \leq \log | \text{مجموعه‌ای که مقدار } x \text{ می‌تواند اختیار کند} | = \log(n-1)$$

$$= \log[|X|-1]$$

↑
تقریباً برای توزیع یکنواخت بین $n-1$ مقدار باقی‌مانده

$$H(x|y) = H(\epsilon|y) + H(x|\epsilon, y)$$

$$H(\epsilon|y) \leq H(\epsilon) = H(p_e) \quad (1)$$

$$H(x|\epsilon, y) = p_e H(x|\epsilon=1, y)$$

$$H(x|\epsilon=1, y) \leq \log(|\lambda|-1) \quad (2)$$

$$\Rightarrow H(x|y) \leq H(p_e) + p_e \log(|\lambda|-1)$$

$$H(x|\hat{x}) \leq H(p_e) + p_e \log(|\lambda|-1)$$

به طرقتی مشابه به سی تران نشن داد که
(به عنوان تمرین)

از طرف دیگر می دانیم که

نبراین

$$X \rightarrow Y \rightarrow \hat{X} = g(Y)$$

$$I(X; Y) \geq I(X; \hat{X})$$

$$H(X) - H(X|Y) \geq H(X) - H(X|\hat{X})$$

$$\Rightarrow H(X|Y) \leq H(X|\hat{X})$$

$$\Rightarrow H(X|Y) \leq H(X|\hat{X}) \leq H(P_e) + P_e \log(|\mathcal{X}| - 1)$$

خاصیت AEP (Asymptotic Equiprobability Property)

خاصیت AEP در سری اطلاعات شبیه قانون اعداد بزرگ در آماری احتمالات است.

قانون اعداد بزرگ (نکته شریانی)
 $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{سری احتمالات}} E x = m_x$

خاصیت AEP (نکته شریانی)
 $-\frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{\text{سری احتمالات}} H(x) \quad \textcircled{*}$

بنابراین سری توان شعریاتی مقادیر $x_1, x_2, \dots, x_n$ را (وضعی $n \rightarrow \infty$) به بردسته، تقسیم بندی کرد. دسته اول که آن را مجموعه شعری می نامیم، $H(x)$ تقریباً با $-\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n)$ برابر است. مجموعه دوم که آن را غیر شعری می نامیم $H(x)$ با $-\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n)$ فاصله دارد. نشان خواهیم داد که دسته اول

دارای تعداد کم احتمال زیاد و دسته دوم دارای تعداد زیاد و احتمال کم است.

نوعی

$$H(\underline{x}) = -\frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

غیرنرمی

$$H(\underline{x}) = -\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n)$$

مثال: متغیرهای تصادفی $\{x_k\}_{k=1}^n$ را در نظر بگیریم که iid هستند
 $x_k \in \{\alpha_i\}_{i=1}^m$

$$P\{x_k = \alpha_i\} = p_i$$

$$H(\underline{x}) = ?$$

فرض کنیم که $n \rightarrow \infty$ و n_i تا از x_k ها دارای مقدار α_i باشند.

$$P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m p_i^{n_i}$$

بترسیم به فرضیات داریم.

از طرف دیگر با توجه به قانون اعداد بزرگ داریم ،

$$P_i = \frac{n_i}{n} \quad (\text{استدلال در احتمال})$$

$$\Rightarrow n_i = n P_i$$

$$\Rightarrow P(x_1, x_2, \dots, x_n) = \prod_{i=1}^m P_i^{n_i} = \prod_{i=1}^m P_i^{n P_i}$$

$$\begin{aligned} &= 2^{\log \prod_{i=1}^m P_i^{n P_i}} \\ &\quad \uparrow \\ &= 2^{\log n} \cdot 2^{\log \prod_{i=1}^m P_i^{P_i}} \\ &= 2^{\log n} \cdot 2^{n \sum_{i=1}^m P_i \log P_i} \quad - H(x) \\ &= 2^{\log n} \cdot 2^{-n H(x)} \\ &= 2^{-n H(x)} \quad (\text{استدلال در احتمال}) \end{aligned}$$

$$x = 2^{\log n}$$

$$x = 2^{\log n}$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) \stackrel{p}{=} H(X) \quad (\text{نسبتی در احتمال})$$

$$P_r \left\{ -\frac{1}{n} \log P(x_1, \dots, x_n) = H(X) \right\} \approx 1$$

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ هاست که خاصیت آن برای آنکه برقرار است راسی توان با $nH(X)$ است که کرد.
 (تجربه دیگر هاست توان با کانتزیم طول ممکن که کرد و در نهایت آنقدری که حاصل با آنقدری صغیر باشد
 بود (تقریباً))

قضیه AEP: اگر $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ متغیرهای تصادفی iid با تابع احتمال $P(x)$ باشند، داریم:

$$-\frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} H(X) \quad (\text{نسبتی در احتمال})$$

اثبات

$$= \frac{1}{n} \log P(x_1, x_2, \dots, x_n) = - \frac{1}{n} \log \prod_{i=1}^n P(x_i)$$

$$= - \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \log P(x_i)$$

مقدار در میان

$$\stackrel{\substack{\text{قانون اعداد بزرگ}}}{=} - \mathbb{E} \{ \log P(X) \} = H(X)$$

